

4.4.3 Definiční obor funkce

Předpoklady: 040402

Všechny funkce není možné zadat předpisem $\Rightarrow$ využívají se i jiné způsoby - například tabulka.

Př. 1: Urči pro funkci $f(x)$ v tabulce:

a) $f(-1)$, $f(\sqrt{5})$, $f(3)$

b) hodnoty x , pro které platí: $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = 2$, $f(x) = \sqrt{5}$

c) $D(f)$

d) obor hodnot $H(f)$

x	$-\sqrt{5}$	-2	-1	0	$\sqrt{5}$	4	12
y	7	π	$\sqrt{5}$	0,5	0	2	-51

a) $f(-1) = \sqrt{5}$, $f(\sqrt{5}) = 0$, $f(3)$ neexistuje

b) hodnoty x , pro které platí: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(4) = 2$, $f(-1) = \sqrt{5}$

c) $D(f) = \{-\sqrt{5}; -2; -1; \sqrt{5}; 4; 12\}$

d) obor hodnot $H(f) = \{-51; 0; 0,5; 2; \sqrt{5}; \pi; 7\}$

Př. 2: Jaká omezení má zadání funkce pomocí tabulky? Jaké má tabulka přednosti?

Omezení: nemůžeme funkce s nekonečným definičním oborem, menší přehlednost, u mnoha hodnot obtížná orientace.

Přednosti: můžeme zadat i funkci, ve které nejsou hodnoty x a y svázány logickým vztahem.

Př. 3: Zapiš tabulkou funkci, pro kterou platí: $D(f) = \{-3; 1; 4; 5\}$, $H(f) = \{0; 1; 2\}$.

$D(f) = \{-3; 1; 4; 5\}$

$H(f) = \{0; 1; 2\}$

x	-3	1	4	5
y	0	1	2	0

Pedagogická poznámka: Uvedené řešení není jediné. Správným řešením je každá tabulka, která má v první řádce všechna čísla uvedená v definičním oboru a v druhém všechna čísla z oboru hodnot, jedno z nich uvedené dvakrát. Na tom, jak jsou k sobě čísla přiřazena nezáleží.

Př. 4: Olda si popletl význam definičního oboru a oboru hodnot a vytvořil následující tabulku. Jde o funkci?

x	0	1	2	0
y	-3	1	4	5

Nejde o funkci. Číslu 0 jsou přiřazeny dvě různé hodnoty $\Rightarrow$ přiřazení není jednoznačné.

Př. 5: Na obrázku je termograf - grafické zachycení změn teploty v průběhu dne.

a) Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.

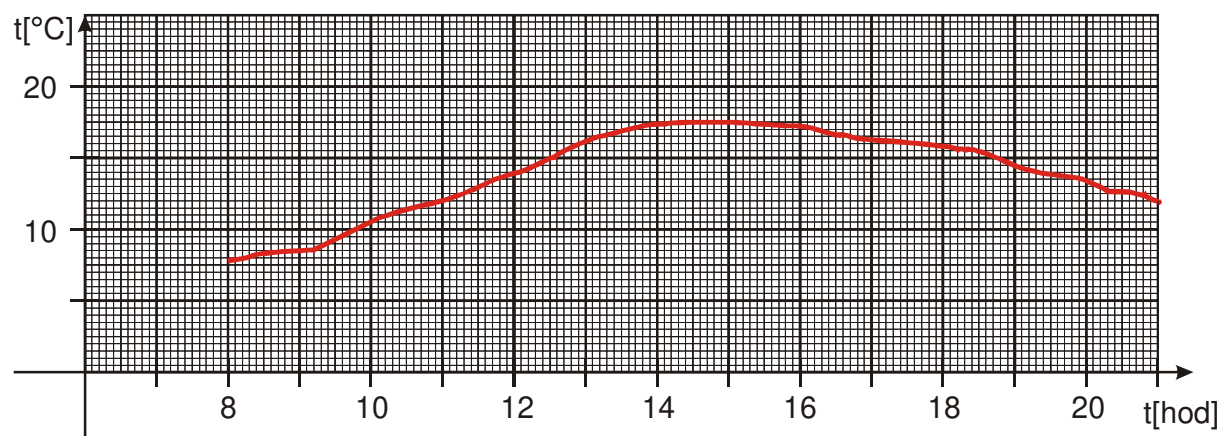
b) Urči $f(8)$, $f(13,5)$, $f(20,9)$, $f(22)$.

c) V které hodině se teplota rovnala 9°C , 15°C , $13,5^\circ\text{C}$?

d) Urči $D(f)$ a $H(f)$.

e) Kdy byla funkce rostoucí a kdy klesající?

f) V kterém období byla teplota vyšší než 14°C ?



a) Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.

Nezávisle proměnná: čas.

Závislá proměnná: teplota.

b) $f(8) = 7,8^\circ\text{C}$

$f(13,5) = 16,8^\circ\text{C}$

$f(20,9) = 11,9^\circ\text{C}$

$f(22)$ - neexistuje (graf pro tuto hodnotu času není nakreslený).

c) $t = 9^\circ\text{C}$ v čase 9,35 h.

15°C v čase 12,55 h a 18,73 h.

$13,5^\circ\text{C}$ v čase 11,3 h a 20,7 h.

d) Urči $D(f)$ a $H(f)$.

$D(f) = \langle 8; 21 \rangle$

$H(f) = \langle 7,8; 17,5 \rangle$

e) Funkce byla rostoucí od 8 h do 14,7 h, klesající od 14,7 h do 21 h.

f) Teplota byla vyšší než 14°C od 12,1 h do 19,3 h

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu není problém v samotném určování hodnot, ale v jeho přesnosti. Žáci ví, kde mají hledat, ale s přepočítáváním čtverečků a přesným odečítáním mají problémy.

Př. 6: Jaká omezení má zadání funkce pomocí grafu? Jaké má graf přednosti?

Přednosti: názornost, celkový pohled.

Omezení: nejde zobrazit funkce, jejichž definiční obor jde k nekonečnu, odečítání hodnot je pouze přibližné.

Vrátíme se k definičnímu oboru. Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.

Př. 7: Urči definiční obor funkce.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = x^2$ d) $y = \sqrt{x}$

a) $y = 2x - 1$

Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly $\Rightarrow D(f) = R$.

b) $y = \frac{1}{x}$

Předpis obsahuje dělení (nesmíme dělit nulou) $\Rightarrow$ výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D(f) = R - \{0\}$.

c) $y = x^2$

Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly $\Rightarrow D(f) = R$.

d) $y = \sqrt{x}$

Předpis obsahuje odmocninu (neumíme odmocňovat záporná čísla) $\Rightarrow$ výraz pod odmocninou nesmí být záporný $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D(f) = \langle 0; \infty \rangle$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad neřešíme příliš dlouho, jde spíš o opakování vlastností operací. Zajímavé to začne být u dalšího příkladu.

Př. 8: Urči definiční obor funkce.

a) $y = \frac{1}{x+1}$ b) $y = \frac{1}{2x-3}$ c) $y = \frac{1}{x^2+1}$ d) $y = \frac{1}{x^2-1}$

Všechny funkce obsahují dělení $\Rightarrow$ hlídáme, aby ve jmenovateli nebyl zlomek.

a) $y = \frac{1}{x+1}$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D(f)=R-\{-1\}$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{2x-3}$$

$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow D(f)=R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$x^2+1=0, \text{ nenastane nikdy } (x^2 \geq 0) \Rightarrow D(f)=R$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$$

- $x=1$
- $x=-1$

$$\Rightarrow D(f)=R-\{\pm 1\}$$

Př. 9: Urči definiční obor funkce.

$$\text{a) } y = \sqrt{x-2}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{2x+1}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3-x}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{5-2x}$$

Ve všech případech se vyskytuje odmocnina, kterou nemůžeme určit ze záporných čísel $\Rightarrow$ do definičního oboru zahrneme pouze čísla, pro která pod odmocninou získáme nezáporné číslo.

$$\text{a) } y = \sqrt{x-2}$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

$$\text{b) } y = \sqrt{2x+1}$$

$$2x+1 \geq 0 \quad / -1$$

$$2x \geq -1 \quad / : 2$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow D(f) = \left\langle -\frac{1}{2}; \infty \right\rangle$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3-x}$$

$$3-x \geq 0 \quad / +x$$

$$3 \geq x \Rightarrow D(f) = (-\infty; 3]$$

$$\text{d) } y = \sqrt{5-2x}$$

$$5-2x \geq 0 \quad / +2x$$

$$5 \geq 2x \quad / : 2$$

$$\frac{5}{2} \geq x \Rightarrow D(f) = \left(-\infty; \frac{5}{2} \right]$$

Př. 10: Urči definiční obor funkce.

a) $y = \frac{1}{x^2 - 5x}$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

c) $y = \frac{1}{x^2 - x - 12}$

Všechny funkce obsahují dělení $\Rightarrow$ hlídáme, aby ve jmenovateli nebyl zlomek.

a) $y = \frac{1}{x^2 - 5x}$

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 0$
- $x = 5$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{0; 5\}$$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 2$
- $x = -2$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{\pm 2\}$$

c) $y = \frac{1}{x^2 - x - 12}$

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow$$

- $x = 4$
- $x = -3$

$$\Rightarrow D(f) = R - \{-3; 4\}$$

Shrnutí: Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.